673. D’Amore B. (2008). Le basi della didattica della matematica. *Scuola Italiana Moderna*. Anno 116, n° 6, 41-45. ISSN: 0036-9888. Reperibile sul sito: www.lascuola.it/webapp/Download/08SIM/G006.pdf

Le basi della didattica della matematica

Bruno D’Amore

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Scuola di dottorato di ricerca in Educacción Matemática, Bogotà, Colombia
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera

La ricerca in didattica disciplinare degli ultimi 30 anni ha caratteristiche ricorrenti: accentrare l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento, ma da un punto di vista fondazionale e comunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento.
Traccerò qui di seguito alcuni elementi di base della ricerca cosiddetta "fondamentale" in didattica della matematica, analizzando solo alcune tra le problematiche che mi sembrano emergere con più forza negli ultimi anni, che si sono consolidate come elementi di ricerca in didattica della matematica, e che forniscono appigli solidi e significativi per azioni d'aula concrete.

1. Il contratto didattico

Fin dagli anni ’70 fece l’ingresso nel mondo della ricerca in Didattica della matematica l’idea di *contratto didattico*, lanciata da Guy Brousseau, che si rilevò subito fruttifera e che venne definitivamente sancita dalle sue ricerche dei primi anni ’80. Furono poi gli studi della seconda metà degli anni ’80 a decretarne il trionfo e la teorizzazione piena; ad essi parteciparono vari studiosi di tutto il mondo: l’idea veniva riconosciuta ed entrava a far parte del linguaggio condiviso dall’intera comunità internazionale.
Uno dei primi tentativi di “definizione” del contratto didattico è il seguente: «In una situazione d’insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l’allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l’accesso a questo compito si fa attraverso un’interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall’allievo ed i comportamenti dell’allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico» (Brousseau, 1986).
Spesso queste "attese" non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della matematica, alla ripetizione di modalità.
Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato enormi frutti, di estremo interesse. Oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza, o alla età immatura, sono invece stati chiariti.
Uno degli studi più noti è quello che va sotto il nome di *L'età del capitano*. Io lo racconterò qui di seguito, così come l'ho vissuto (e fatto vivere) personalmente. In una classe IV elementare (età degli allievi 9-10 anni) di un importante centro agricolo, ho proposto il

celeberrimo problema (nel quale il "capitano" diventa un "pastore"): «Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?».
In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18». Di fronte allo sgomento della maestra, ho reagito spiegandole che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili (per una delle tante forme di impossibilità), dunque i bambini avevano introdotto nel contratto didattico una clausola in base alla quale, per così dire: «Se la maestra ci dà un problema, questo deve essere risolto certamente». E, poiché vige un'altra clausola micidiale secondo la quale i dati numerici presenti nel testo vanno presi tutti e possibilmente nell'ordine in cui compaiono, i bambini di quella classe non avevano nessun'altra possibilità, nessuno scampo: *dovevano* rispondere usando i dati 12 e 6. L'unico imbarazzo stava semmai nella scelta della operazione da eseguire. Ora, può darsi che quella dell'addizione sia stata una scelta casuale; ma va detto che alla mia richiesta ad un biondino particolarmente vivace di spiegare perché non avesse fatto uso per esempio della divisione, questo, dopo un attimo di riflessione, mi ha spiegato che: «No, è troppo piccolo!», riferendosi ovviamente all'età del pastore...
Gli studi sul contratto didattico, praticamente coltivati in tutto il mondo, si stanno rivelando molto fruttiferi ed hanno dato, in pochissini anni, risultati di grande interesse, che sempre più ci stanno facendo conoscere l'epistemologia dell'apprendimento matematico.

2. Misconcezioni

Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda *necessario* passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.
Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute.
Qui si presenta la vasta ed interessante problematica del curricolo nascosto. Lo studente rivela le proprie misconcezioni quando applica *correttamente* regole *scorrette*. Spesso, all'origine di questo fatto c'è una mancata comprensione od un'errata interpretazione. Se l'insegnante non si rende conto di ciò, le sue sollecitazioni cadono a vuoto perché lo studente ha già incluso nel proprio curricolo quelle regole che ritiene corrette e che, in taluni casi, hanno funzionato.
Per esempio, in una III elementare, uno studente eseguiva in colonna le seguenti sottrazioni:

37-	89-	26-	56-
24=	67=	18=	43=
----	----	----	----
13	22	12	13

L'insegnante osservò che tre sottrazioni su quattro erano state eseguite correttamente, diede dunque una valutazione positiva, ma invitò lo studente, nella terza, a "prendere in prestito una decina". Lo studente non capiva di che decina si stava parlando perché aveva in mente un'altra regola personale: per eseguire le sottrazioni in colonna si procede da destra verso sinistra e, in ogni colonna, si sottrae dal più grande il più piccolo. Ne aveva avuto conferma in molti casi, la comunicazione che riguardava casi come la terza sottrazione non gli era giunta per chissà quale motivo, e dunque aveva assunto nel suo curricolo quella "regola". Essa funzionava *quasi* sempre e nei casi negativi egli non capiva perché: stava usando

correttamente, infatti, una regola che non sapeva essere invece scorretta. Una vera e propria misconcezione.
Dunque, le *misconcezioni* si possono interpretare come concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. Attenzione, però: lo studente non lo sa e dunque ritiene che le sue, quelle che per il ricercatore sono misconcezioni, siano invece concezioni vere e proprie. Dunque è l'adulto che sa essere quelle elaborate e fatte proprie dai ragazzi delle misconcezioni. Chiamarle *errori* è troppo semplicistico e banale: non si tratta di punire, di valutare negativamente; si tratta, invece, di dare gli strumenti per l'elaborazione critica.

3. Immagini e modelli

Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo). Tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria.
L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative ad un certo concetto costituisce il modello mentale (interno) del concetto stesso.
Farsi un modello di un concetto, dunque, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile).
Ci sono due possibilità:

- il modello si forma al momento giusto nel senso che si tratta davvero del modello corretto, proprio quello che l'insegnante auspicava per quel tale concetto; l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello corretto (quello voluto dall'insegnante) del tale concetto ;
- il modello si forma troppo presto, quando ancora rappresenta solo un'immagine che avrebbe dovuto essere ulteriormente ampliata; a questo punto non è facile raggiungere il concetto auspicato perché la stabilità del modello è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

Proseguiamo nell'analisi dei modelli e del loro ruolo nell'apprendimento.
Quando un insegnante propone un'immagine forte e convincente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto, l'immagine si trasforma in *modello intuitivo*.
C'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe non essere ancora quello che del concetto ci si aspetta all'interno del sapere matematico.
Dunque, tra i modelli, si riserva il nome di *modello intuitivo* a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte.
Si parla anche, talvolta, di *modelli parassiti*.
Per esempio, avendo accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra numeri naturali ed avendolo erroneamente esteso a tutte le moltiplicazioni, modello intuitivo rafforzato dalle raffigurazioni schematiche (per *schieramento*), si forma un modello parassita che si può enunciare così: la moltiplicazione accresce sempre, *deve* accrescere sempre.
Analogo è il modello parassita della divisione. Sia che venga affrontata "per contenenza" sia "per ripartizione", se non si conosce un po' di didattica della matematica, si può correre il rischio di dare allo studente un modello intuitivo che finirà con il produrre un modello parassita: in una divisione A:B, il numero B *deve* essere minore del numero A.

Didatticamente, allora, conviene lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al sapere matematico che si vuole raggiungere.
Più “forte” è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per *accomodarlo* ad una nuova immagine. Insomma, la immagine-misconcezione non deve diventare modello visto che, per sua stessa natura, è in attesa di definitiva sistemazione.
Si tratta allora di non dare informazioni distorte e sbagliate; non solo non darle in modo esplicito, ma addirittura evitare che si formino autonomamente per non favorire l’insorgere di modelli parassiti.
Vediamo un solo esempio in dettaglio.
La sottrazione.
La sottrazione, per sua stessa natura, presenta almeno due diversi significati intuitivi, a dispetto di un unico significato formale, che si possono evidenziare ricorrendo ancora a due problemi suggeriti da Efraim Fischbein:
1. *Se togliamo 7 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?*
2. *Ho 7 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?*
È ovvio che entrambi i problemi si risolvono con una sottrazione, 10-7; ma nel primo caso, quello che ha come modello intuitivo il *togliere via*, la cosa è intuitiva perché c’è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo; nel secondo caso è assai più spontaneo il ricorso a strategie additive del tipo: 7 + … = 10, intendendo in qualche modo che quei puntini … devono valere 3. D’altra parte è additiva ogni strategia di “complemento a”, come, per esempio, l’operazione di dare il resto in un negozio: il negoziante di solito non fa la differenza, ma fa, passo a passo, il complementare a partire dalla spesa fino ad arrivare alla somma versata. Abbiamo dunque tra gli allievi una certa percentuale di risposte che non contemplano la sottrazione; al suo posto c’è chi fa l’addizione 7+10 o 10+7 legata al fatto che c’è la parola *aggiungere* che suggerisce l’uso dell’addizione, e c'è chi scrive 7+3=10.
C’è un forte contrasto tra l’operazione ingenua e spontanea di conteggio che verrebbe di fatto ad essere usata in una situazione concreta (cioè il conteggio: 7+1+1+1, con la risposta 3 legata al numero dei +1 necessari per giungere a 10) ed il significato formale della sottrazione. Se esistesse un’operazione specifica che esprime il numero di quei +1 che permettono di passare da 7 a 10, probabilmente la percentuale di successo salirebbe nettamente; qualcuno potrebbe dire che quell’operazione esiste ed è proprio la sottrazione espressa da 10-7; ma le prove fatte e le considerazioni effettuate finora mostrano che *non* è questo il significato intuitivo con cui gli studenti costruiscono nel loro cognitivo la sottrazione.

6. Ostacoli

Da qualche decennio si sono i individuati in didattica della matematica tre tipi di ostacoli che si frappongono all'apprendimento:
- ostacoli di natura ontogenetica
- di natura didattica
- di natura epistemologica.

Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall’età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età: rispetto all’acquisizione di certi concetti, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti rispetto ad un progetto didattico da parte dell’insegnante e possono costituire quindi ostacoli di *natura ontogenetica* (l’allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica).

Ogni docente sceglie un progetto, un curricolo, un metodo, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, che trasforma il sapere adulto in un sapere da i nsegnare agli allievi, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche: egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi *altri*, la scelta di *quel* progetto si rivela un *ostacolo didattico*.

Un esempio di ostacolo didattico è la presentazione che fanno taluni insegnanti della scuola primaria al momento di presentare gli oggetti infiniti: il segmento come infinità di punti, la retta come figura illimitata. Il modello più diffuso nelle scuole è quello del segmento come una collana di perline che, per la sua immediatezza, viene subito accettato dagli studenti e diventa modello intuitivo; esso costituisce un evidente ostacolo didattico al momento in cui si deve introdurre l'idea di densità, nella stessa scuola elementare ed ancora di più nella scuola media, e quando si deve introdurre l'idea di continuità nella scuola superiore. Ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che gli studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa del modello intuitivo persistente di segmento come collana di perle. Quanto alla retta come figura illimitata, essa ed il conteggio prolungato dei numeri naturali, sembrano fornire agli studenti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che pure crea gravi ostacoli didattici nei corsi successivi.

Ogni argomento a carattere matematico ha un proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua evoluzione all'interno della matematica, dalla sua accettazione critica nell'àmbito della atematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere. Quando nella storia della evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno ostacoli di carattere epistemologico ad essere appreso; ciò si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni.

Riassumendo, l'ostacolo ontogenetico è legato allo studente ed alla sua maturità (da tanti punti di vista), quello didattico alla scelta strategica del docente, quello epistemologico alla natura stessa dell'argomento.

Bibliografia

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.

D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). *Zero. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2008). *Diverse componenti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2007). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2001). *Matematica di base per insegnanti in formazione*. Bologna: Pitagora.
Marazzani I. (ed.) (2007). *I numeri grandi*. Trento: Erickson.